

Fuzzy Logic

Een literatuuronderzoek

Sociaal Geneeskundige Beroepsopleiding
Arbeids - en Bedrijfsgeneeskunde
Katholieke Universiteit Nijmegen
Groep 25

Datum december 1997
Versie 2.4
Auteur N.G. du Bois

Fuzzy logic

” Een methode om te rekenen met woorden.”
(Lotfi A. Zadeh)



Afbeelding 1. Prof. Lotfi A. Zadeh.

Voorwoord

Bij het schrijven van mijn onderzoeksscriptie bleek fuzzy logic - de "vage logica"- een belangrijke rol te gaan spelen. Gezien de onbekendheid met het begrip en de materie was het nodig om mij daarin te verdiepen, een literatuuronderzoek was het gevolg. Ik heb daarbij zowel gebruik gemaakt van publicaties op Internet, als van nu nog meer gangbare literatuurbronnen. Deze schriftelijke weergave daarvan is het resultaat.

Getracht zal worden om deze voor artsen niet alledaagse materie zo helder mogelijk uit de doeken te doen, in duidelijke taal en met gebruikmaking van zo min mogelijk formules. Ter illustratie zijn wel enige basale formules opgenomen, maar ook zonder zich hierin te verdiepen is het de bedoeling dat de lezer de stof kan volgen. Ter nadere verduidelijking zijn van een aantal begrippen en processen illustraties opgenomen. Het is de bedoeling dat de lezer na het lezen van deze literatuurscriptie voor zichzelf enigszins een voorstelling kan maken van wat fuzzy logic inhoudt en een basaal besef heeft van een aantal belangrijke begrippen. Voor meer informatie wordt verwezen naar de gebruikte literatuur.

Het is tevens de bedoeling dat mijn onderzoeksscriptie met meer begrip gelezen kan worden. Ik wil de geïnteresseerde lezer in staat stellen de impact van datgene wat daarin beschreven wordt zo goed mogelijk te begrijpen. Het gebruik van fuzzy logic software is goed te doen zonder de achterliggende theorie volledig te begrijpen, enige basale kennis is wel nodig.

Inhoud

1 Inleiding	Pag. 4
2 De klassieke, Booleaanse logica	Pag. 5
3 Onzekerheid en vaagheid	Pag. 6
4 Fuzzy set theorie	Pag. 6
5 De lidmaatschapsfunctie	Pag. 6
6 De "linguistic hedges"	Pag. 9
6.1 Concentratie	Pag. 9
6.2 Dilatatie	Pag. 9
6.3 Contrastverhoging	Pag. 10
6.4 Contrastverlaging	Pag. 10
7 Operaties op verzamelingen	Pag. 11
7.1 Het complement	Pag. 11
7.2 De doorsnede	Pag. 12
7.3 De vereniging	Pag. 13
8 Fuzzy getallen en fuzzy intervallen	Pag. 15
9 Fuzzy logic en redeneren	Pag. 16
10 Het inferentieproces	Pag. 18
10.1 Fuzzificatie	Pag. 18
10.2 Qualitative reasoning	Pag. 18
10.2.1 Inferentie	Pag. 18
10.2.2 Aggregatie	Pag. 20
10.3 Defuzzificatie	Pag. 20
11 Voorbeelden	Pag. 21
11.1 Fuzzy control	Pag. 21
11.2 De Liquiditeitsschatting	Pag. 26
12 Toepassingen van fuzzy logic	Pag. 32
Literatuur	

1 Inleiding

Fuzzy logic is "booming". Sinds de introductie ervan door Lotfi A. Zadeh (geboren 1921 in Baku, Azerbeidzjan), professor in de computerwetenschappen aan de universiteit van Berkeley in Californië met zijn artikel over *Fuzzy Sets* in het tijdschrift *Information and Control* in 1965 is er thans sprake van een wereldwijd spectaculair groeiende ontwikkeling van het denken in fuzzy categorieën. Aanvankelijk werden fuzzy logic en de wetenschappers die zich daarmee bezighielden door de Westerse wetenschappelijk wereld niet serieus genomen. In Oosterse landen als Japan, Korea, Taiwan en China echter wel. Daar werden de theorie en de praktische toepassingsmogelijkheden verder ontwikkeld. Produkten voorzien van fuzzy besturingslogica werden door hen op de markt gebracht. Nu is dat in het Westen snel aan het veranderen.

In Europa was het E.H. Mamdani (London University) die in 1975 de eerste praktische toepassing realiseerde in de vorm van een fuzzy regeling van een stoommachine. In Nederland waren het H.R. van Nauta Lemke en W.J. Kickert die in diezelfde tijd aan de Technische Universiteit van Delft een vage regelaar bouwden voor de temperatuurregeling van een warmwaterinstallatie. De grote doorbraak was de automatisering van de cementfabriek van F.L. Schmidt & Company te Kopenhagen door de Deense ingenieur L.P. Holmblad. Over de fuzzy regeling hiervan werd gepubliceerd in 1980. Vanaf die tijd kwam één en ander goed op gang in Japan met financiële steun van de regering en een aantal grote bedrijven.

In de electronica, in de financiële wereld en zelfs in de wereld van marketing neemt fuzzy logic aan invloed toe. Ook binnen de bedrijfswetenschappen zijn er toepassingen op gebieden als bijvoorbeeld Multi-Criteria Decision Making (MCDM), Multi-Person Decision Making (MPDM) en de combinatie van beide. Wellicht dat met de resultaten van de onderzoeksscriptie de eerste stappen gezet worden met de introductie ervan in de arbeids- en bedrijfsgeneeskunde. Deze literatuurscriptie is uitsluitend de weergave vanuit bestaande literatuur over fuzzy logic. Omwille van de leesbaarheid staat niet achter elke uitspraak een verwijzing naar de auteur. Alles is echter afkomstig uit de literatuur waarnaar in de literatuurlijst verwezen wordt. Deze scriptie is niet bedoeld voor publicatie, maar uitsluitend voor eigen gebruik in het kader van de opleiding tot bedrijfsarts.

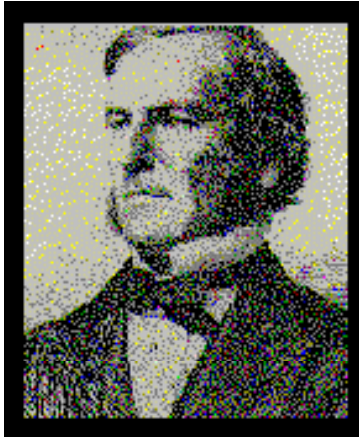


Professor E. H. Mamdani

Afbeelding 2. Prof. E.H. Mamdani.

2 De klassieke, Booleaanse logica

De bekende, klassieke logica zoals die onder andere in computers gebruikt wordt, de Booleaanse logica, is een "alles of niets" logica. George Boole (1815-1864) - grotendeels een autodidact op het gebied van de wiskunde - was de eerste hoogleraar wiskunde aan de University College van Cork (toen het Queen's College) in Ierland.



Afbeelding 3. George Boole.

Hij was de uitvinder van de mathematische logica. Zijn boeken *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) en *An Investigation of the Laws of Thought* (1854) vormen de basis van de tegenwoordige computerwetenschappen en cybernetica. Uiteraard is de Booleaanse algebra ook van hem afkomstig. Boole wordt beschouwd als één van de grootste wiskundigen uit de negentiende eeuw.

In de Booleaanse logica is iets "waar" of "niet waar", er is geen tussenweg. Denk aan de bekende 1 en 0 uit het binaire talstelsel toegepast in de computerwetenschap. Toegepast op de leer van de verzamelingen betekent dit dat iets wel of geen lid van een bepaalde verzameling is. In die leer is elke verzameling voorzien van heldere grenzen, dit zijn de klassieke verzamelingen. Zo'n klassieke verzameling wordt in de literatuur ook wel een **crisp set** genoemd, een scherp begrensde verzameling. Crisp set in tegenstelling tot **fuzzy set**, ofwel vage verzameling. De klassieke verzameling kent voor de **karakteristieke functie** van de elementen slechts twee waarden: {0 en 1}; d.w.z. niet of wel lid van de verzameling. Deze karakteristieke functie heet in de leer van de vage verzamelingen (fuzzy set theorie) de **lidmaatschapsfunctie**.

3 Onzekerheid en vaagheid

Er zijn voor dit onderwerp twee belangrijke vormen van onzekerheid: die in de waarschijnlijkheidsleer en die van de taal. De onzekerheid in de waarschijnlijkheidsleer houdt zich bezig met de onzekerheid omtrent het optreden van een bepaalde gebeurtenis. Als voorbeeld dient de volgende uitspraak: de kans om het doel te raken is 0,8. De gebeurtenis zelf- het doel raken - is duidelijk gedefinieerd. De onzekerheid zit hem in het al dan niet raken van het doel. De onzekerheid is gekwantificeerd door de kans: 0,8. In het algemeen: minimaal is een kans 0 en maximaal is een kans 1.

Een ander type onzekerheid ligt in de menselijke taal. Bijvoorbeeld het gebruik van woorden als "lange mensen," "hete dagen," "stabiele koersen", zonder dat daar exacte definities aan ten grondslag liggen. Toch kunnen mensen werken en beslissingen nemen met deze subjectieve criteria. Door het gebruik maken van abstracties en het denken in analogieën kunnen met een paar zinnen complexe situaties beschreven worden die anders zeer moeilijk in een nauwkeurig wiskundig model te gieten zouden zijn.

In ons taalgebruik worden veel zaken aangeduid met termen die voor velen van ons wel hanteerbaar zijn, maar toch niet in een getal worden uitgedrukt. Ze hebben een zekere vaagheid. Dat kunnen bijvoorbeeld uitspraken zijn over batterijspanning (onvoldoende, net voldoende, genoeg); lengte (klein, normaal of lang); gewicht (licht, medium of zwaar). Dit zijn uitspraken over grootheden, die in dit geval ook meetbaar zijn; batterijspanning in Volt, lengte in meter en gewicht in kilogram. Deze grootheden worden **linguïstische variabelen** genoemd. In dit geval zelfs **meetbare** linguïstische variabelen. De verschillende modaliteiten van die linguïstische variabelen worden de linguïstische termen (soms ook labels) genoemd. *Dus - ter verduidelijking - groot, gemiddeld of klein zijn linguïstische termen van de linguïstische variabele lengte.* De linguïstische variabelen en hun termen spelen een belangrijke rol in fuzzy logic. Zij vormen de **vocabulaire** van het systeem waarin de regels van fuzzy logic werken. De linguïstische termen vormen elk op zich fuzzy sets.

4 Fuzzy set theorie

De fuzzy set is in feite een veralgemenisering van de klassieke verzameling. De karakteristieke functies van de elementen in een verzameling zijn uitgebreid van de waarden $\{0,1\}$ naar de **lidmaatschapswaarden** in het interval $[0,1]$. Het interval loopt dan van 0,0 ... 0,1 ... 0,2 ... 0,3 ... 0,4...enz...naar 1,0. Uiteraard met alle - oneindig veel - ertussen liggende waarden. De karakteristieke functiewaarden uit de klassieke logica zijn bij fuzzy logic de limieten geworden van de lidmaatschapswaarden. Lidmaatschapswaarden worden ook wel **waarheidswaarden** genoemd. In fuzzy logic kan iets dus niet waar zijn, een beetje waar, erg waar, tot volkomen waar zijn, met alles wat er tussenin ligt. Een element kan een beetje tot de ene vage verzameling behoren en tegelijkertijd heel veel tot een tweede vage verzameling en wellicht nog een heel klein beetje tot een derde, enzovoorts.

5 De lidmaatschapsfunctie

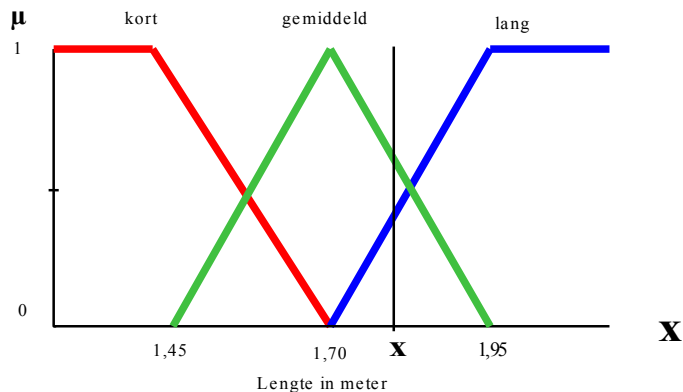
De mate van het behoren van een element tot een fuzzy set wordt tot uitdrukking gebracht door de lidmaatschapswaarde " μ ". Voor een continue variabele wordt deze "mate van behoren tot" tot uitdrukking gebracht door een wiskundige functie: **de lidmaatschapsfunctie " $\mu(x)$ "**. Zoals eerder gezegd zijn de linguïstische termen fuzzy sets. Een linguïstische variabele x heeft een bepaalde lidmaatschapswaarde μ voor een linguïstische term (= fuzzy set). De fuzzy set kent een lidmaatschapsfunctie.

Wellicht maakt de volgende zin met een voorbeeld het wat duidelijker: *"de waarde **1,80 meter** voor de linguïstische variabele **lengte** heeft een lidmaatschapswaarde van 0,0 voor de linguïstische term **Kort**, een lidmaatschapswaarde 0,60 voor de linguïstische term **Gemiddeld** en een lidmaatschapswaarde 0,40 voor de linguïstische term **Lang**.* (zie ook figuur 2)

In deze zin is gebruikt gemaakt van 3 termen, vertegenwoordigd door de 3 fuzzy sets Kort, Gemiddeld en Lang. In veel toepassingen worden er wel meer gebruikt, bijvoorbeeld 5 of 7 termen. Hun aantal is vrijwel altijd oneven. Dat komt door het gegeven dat de meeste linguïstische variabelen symmetrisch

gedefinieerd worden: een middelste waarde en twee limieten. Als voorbeeld delen we lengte op die manier op in de drie linguïstische termen Kort, Gemiddeld en Lang.

In figuur 2 staan de lidmaatschapsfuncties van deze termen. De getallen zelf zijn vrij arbitrair gekozen en slaan op volwassen mannen en dienen slechts als voorbeeld. Rood is de lidmaatschapsfunctie voor Kort, groen is de lidmaatschapsfunctie voor Gemiddeld en blauw is de lidmaatschapsfunctie voor Lang. Dat zijn dus 3 fuzzy sets met elk een eigen $\mu(x)$, te weten $\mu_{KORT}(x)$, $\mu_{GEMIDDELD}(x)$ en $\mu_{LANG}(x)$. Bijvoorbeeld de lidmaatschapsfunctie $\mu_{GEMIDDELD}(x)$ is de lidmaatschapswaarde μ van x in *Gemiddeld*. X heet dan het universum (= universele verzameling) van de basisvariabele x en bestaat uit alle mogelijke lengtes.



Figuur 2. Drie fuzzy sets weergegeven door hun lidmaatschapsfuncties voor de linguïstische variabele lengte. De zwarte streep geeft de positie aan van een man van 1,80 m.

De fuzzy set van mannen met gemiddelde lengte is tweezijdig begrensd. Een man met een lengte van 1,70 meter krijgt voor Gemiddeld de lidmaatschapswaarde $\mu = 1$ en vanuit dit punt loopt die waarde aan beide zijden af naar 0. Een man met een lengte van 1,45 meter wordt niet meer geacht tot deze fuzzy set te behoren, evenmin als een man met een lengte van minimaal 1,95 meter.

Uit figuur 2 valt ook nog op te maken dat de fuzzy sets Kort en Lang elkaar niet overlappen, maar elkaar raken in het punt 1,70 meter op de x -as. De betekenis hiervan is dat een man nooit tegelijkertijd kan toebehoren aan Kort en Lang. De verzameling Gemiddeld vervult hier een overgangsklasse.

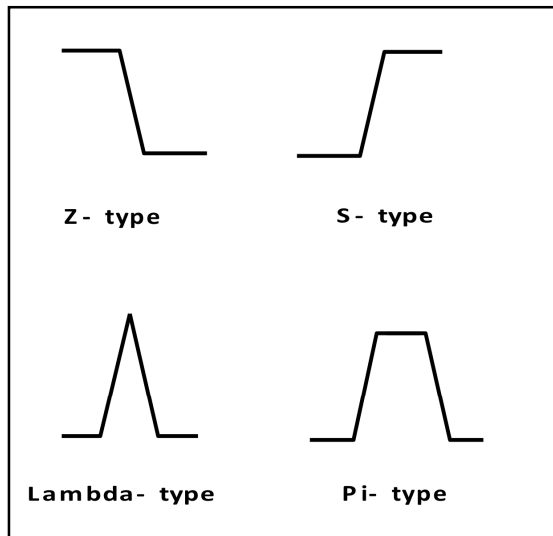
In formulevorm zien voor lengte x de 3 lidmaatschapsfuncties er als volgt uit (de 0,25 in de noemer is het verschil tussen de bijbehorende limieten. De eenheid is in meter).

Fuzzy set	Lidmaatschapsfunctie		
Kort	$\mu_{KORT}(x) =$	0	als $x > 1,70$ m
		$(1,70 - x) / 0,25$	als $1,70 \text{ m} \geq x \geq 1,45 \text{ m}$
		1	als $x < 1,45 \text{ m}$
Gemiddeld:	$\mu_{GEMIDDELD}(x) =$	0	als $x < 1,45 \text{ m}$ en als $x > 1,95 \text{ m}$
		$(x - 1,45) / 0,25$	als $1,45 \text{ m} \leq x \leq 1,70 \text{ m}$
		$(1,95 - x) / 0,25$	als $1,70 \text{ m} \leq x \leq 1,95 \text{ m}$
		1	als $x = 1,70 \text{ m}$
Lang	$\mu_{LANG}(x) =$	0	als $x < 1,70 \text{ m}$
		$(x - 1,70) / 0,25$	als $1,70 \text{ m} \leq x \leq 1,95 \text{ m}$
		1	als $x > 1,95 \text{ m}$

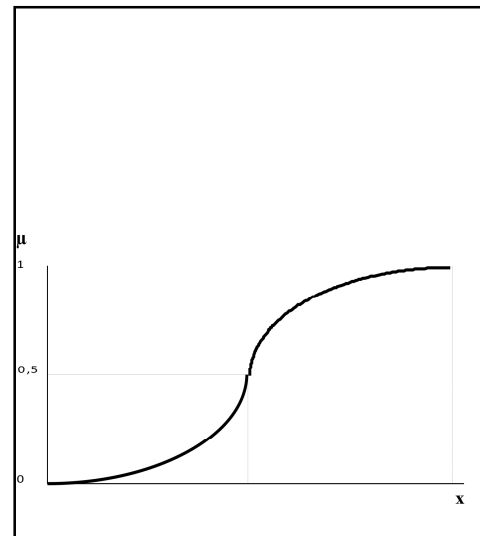
Een zekere lengte x heeft een bepaalde lidmaatschapswaarde voor de fuzzy set Lang en een andere lidmaatschapswaarde voor de fuzzy set Gemiddeld. Lengte is echter op zich geen verzameling: het is een meetbare linguïstische variabele.

Er wordt in de literatuur een groot aantal verschillende vormen voor lidmaatschapsfuncties voorgesteld.

De meeste praktische toepassingen gebruiken slechts de standaard lidmaatschapsfuncties. Deze staan afgebeeld in figuur 3.



Figuur 3. De standaard lidmaatschapsfuncties.



Figuur 4. Lidmaatschapsfunctie voor geremde groei.

Het Z-type, het S-type en het Λ -type (lambda), ook wel driehoeksvormige functie genoemd zijn in figuur 2 te zien. Het Π -type, ook wel trapeziumvormige lidmaatschapsfunctie genoemd geeft weer dat over een zeker traject de lidmaatschapsfunctie $\mu(x)$ constant blijft, ondanks de veranderende basisvariabele x .

Eveneens genoemd dient te worden de logistieke of S-kromme zoals beschreven in Eyzenga & Westerhof. Dat is ook een S-functie, maar dan één met een vloeiend verloop. De toepassing van deze kromme is zinvol bij de weergave van verschijnselen die de karakteristieke eigenschap van verzadiging hebben. In eerste instantie is er sprake van een snelle groei, daarna van een geremde groei. Dit soort verschijnselen kunnen overal worden aangetroffen. Bijvoorbeeld de topsnelheid van een door de omringende lucht geremd object; de groeisnelheid van een populatie (onder gelijkblijvende omgevingscondities); de daling van het foutenpercentage in een kwaliteitsproject; de daling van het aantal snelheidsovertreders als gevolg van strengere controle. Zie figuur 4.

6 De "linguistic hedges"

Een ander belangrijk kenmerk van fuzzy systemen is de mogelijkheid om zogenaamde "hedges", oftewel modificatoren van fuzzy waarden, te definiëren. Deze operaties zijn ontworpen met het doel zo dicht mogelijk bij de gewone spreektaal aan te sluiten. Het is in feite het invoeren van bijvoeglijke naamwoorden en bijwoorden om zo een nuancering in een uitspraak aan te brengen. Een voorbeeld:

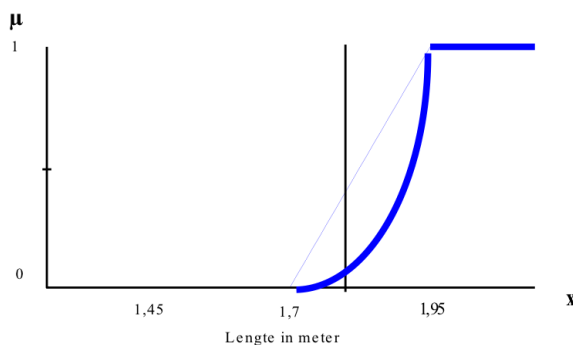
"Jane is oud" wordt: "Jane is erg oud". De "hedge" is in dit geval: **erg**.

Het definiëren van hedges bij het ontwerpen ervan is een tamelijk subjectief proces en kan van project tot project variëren. Er zijn afspraken gemaakt over een aantal veel gebruikte hedge-operatoren, zodat een totale spraakverwarring kan worden uitgesloten.

Enkele voorbeelden van hedge-operaties zijn:

6.1 Concentratie

De concentratie-operator versterkt de werking van de basis fuzzy set, door de oorspronkelijke lidmaatschapswaarden te kwadrateren. Dit heeft een versmalling van de fuzzy set tot gevolg. Stel dat wij de fuzzy set voor "lang" willen veranderen in de set "erg lang", via deze operatie, dan levert dat de volgende grafiek op in figuur 5. Blauw is de nieuwe situatie, de onderbroken lijn is de oude. De lidmaatschapswaarde van de man van 1,80 m voor de fuzzy set "erg lang" is slechts 0,16.



Figuur 5. De oude set "lang" is veranderd in de set "erg lang".

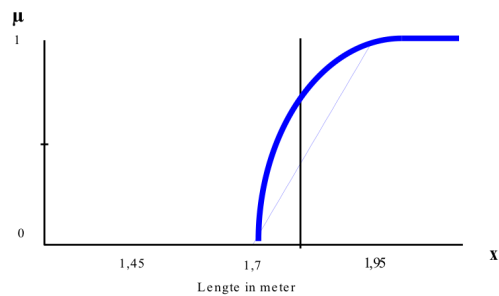
Het staat iedereen vrij om andere concentratie-operatoren te gebruiken, bijvoorbeeld door niet het kwadraat, maar de derde macht te nemen.

6.2 Dilatatie

Hierbij wordt van de oorspronkelijke lidmaatschapswaarden de vierkantswortel getrokken. De uitspraak wordt afgezwakt.

"Jane is oud" wordt dan Jane is "tamelijk oud".

Toegepast op de set "lang" naar een set "tamelijk lang" levert dat het beeld op als in figuur 6. De lidmaatschapswaarde van de man van 1,80 m voor de fuzzy set "tamelijk lang" is 0,63.

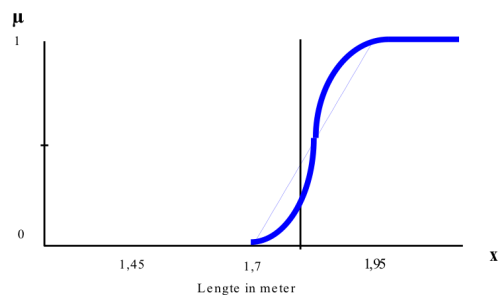


Figuur 6. De set "tamelijk lang" is gemaakt.

6.3 Contrastverhoging

Contrastverhoging is een combinatie van beide voorgaande operaties. Het wordt bereikt door de lidmaatschapswaarden boven 0,5 te verhogen (dilatatie) en beneden 0,5 te verlagen (concentratie). Een linguïstische voorbeeld is "absolute overwinning" in plaats van "overwinning". De verschillen tussen de "goede" leden en de "mindere" leden van de set worden vergroot. Die boven het kantelpunt worden beter en die beneden het kantelpunt slechter.

Toegepast op de set lang levert dat het beeld op in figuur 7.

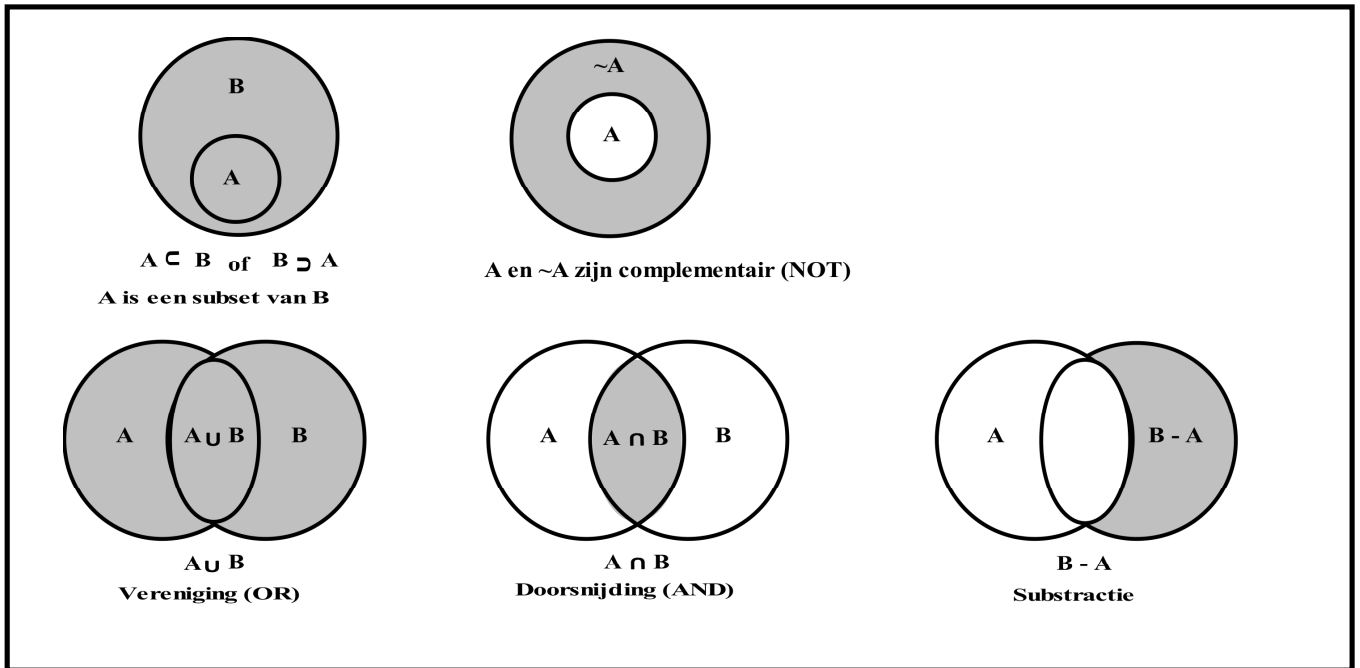


Figuur 7. Contrastverhoging.

6.4 Contrastverlaging

De lidmaatschapswaarden worden hierbij geconcentreerd rondom de lidmaatschapswaarde 0,5. Boven het kantelpunt wordt μ gedilateerd (methode 2) en het resultaat daarvan wordt met 2 vermenigvuldigd. Beneden het kantelpunt wordt $1 - \mu$ gedilateerd, het resultaat met 2 vermenigvuldigd en dat geheel weer van 1 afgetrokken.

7 Operaties op verzamelingen



Figuur 8. De belangrijkste begrippen en operaties op klassieke verzamelingen.

In figuur 8 staan de belangrijkste begrippen en operaties op klassieke verzamelingen afgebeeld. Deze helpen de operaties op fuzzy sets beter te begrijpen.

De standaardoperaties op fuzzy sets zijn het **standaard Zadeh-complement**, de **standaard Zadeh-doorsnede** en de **standaard Zadeh-vereniging**. Al deze operaties zijn operaties op de lidmaatschapsfuncties van de fuzzy sets.

7.1 Het complement

Het complement van een klassieke verzameling A wordt aangegeven met $\sim A$ (lees **NIET- A**). Samen vormen ze de universele verzameling X . Het complement $\sim A$ bevat namelijk alle elementen die niet tot de klassieke verzameling A behoren.

Bij de fuzzy set gaat het anders.

Daar is het complement $\sim A$ van de fuzzy set A gedefiniëerd als $[1 - \text{de lidmaatschapsfunctie van } A]$.

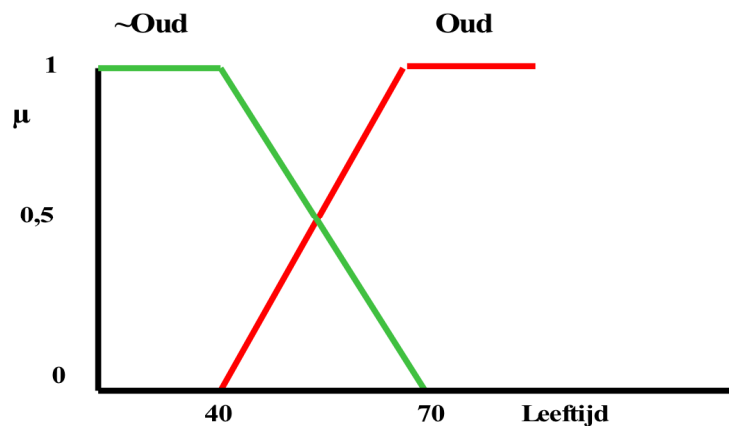
Iets anders gezegd: voor ieder μ in A zit er een $1 - \mu$ in $\sim A$.

Oftewel $\sim A = 1 - A$. (lees: "niet- $A = 1 - A$ ").

Het correspondeert met de Booleaanse **NOT** operatie.

Stel het gaat om de twee sets die de leeftijd verdelen in oud en niet oud ($= \sim$ oud). De lidmaatschapsfunctie voor oud is voor 40 jaar $= 0$ en voor 70 jaar $= 1$. Omgekeerd is dan de lidmaatschapsfunctie voor niet oud voor 40 jaar $= 1$ en voor 70 jaar $= 0$. In figuur 9 worden de twee sets afgebeeld. In formulevorm ziet het er zo uit:

$$\text{NOT: } \mu_{\sim A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Figuur 9. De fuzzy set Oud en het complement niet- Oud ($\sim$ Oud).

7.2 De doorsnede

De doorsnede van twee klassieke verzamelingen A en B aangegeven door $A \cap B$ (= “in A **EN** in B ”), bevat alleen die elementen die in beide afzonderlijke sets voorkomen. Dus tegelijkertijd zowel in A en in B . Het correspondeert met de Booleaanse **AND** operatie.

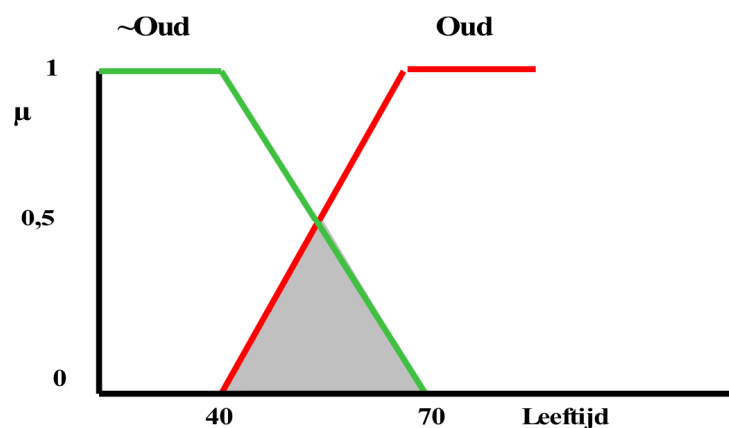
Aangezien de verzamelingen A en $\sim A$ per definitie geen gemeenschappelijke elementen hebben is de doorsnede van A en $\sim A$ een lege verzameling. Deze eigenschap staat bekend als de **law of Non-contradiction**. Iets kan binnen de Booleaanse logica niet tegelijkertijd waar en niet-waar zijn.

Deze wet gaat voor de fuzzy set theorie niet op.

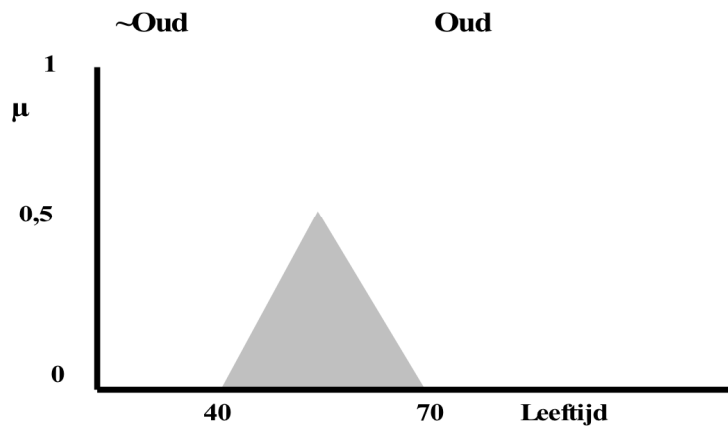
De doorsnee voor 2 fuzzy sets A en B in X wordt gegeven door:

$$\text{AND: } \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Dat wil zeggen dat voor de doorsnede van twee fuzzy sets het **minimum** van de twee argumenten genomen moet worden: het grijs gearceerde gebied in figuur 10. Het blijkt dat er in dit geval geen lege verzameling ontstaat. Dat komt omdat er een overlap van de lidmaatschapswaarden plaatsvindt. Iets wat bij de Booleaanse logica niet voorkomt.



Figuur 10. De doorsnede van de fuzzy sets Oud en niet- Oud.



Figuur 11. De resterende "fuzzy space" van de doorsnede van de fuzzy sets Oud en niet- Oud.

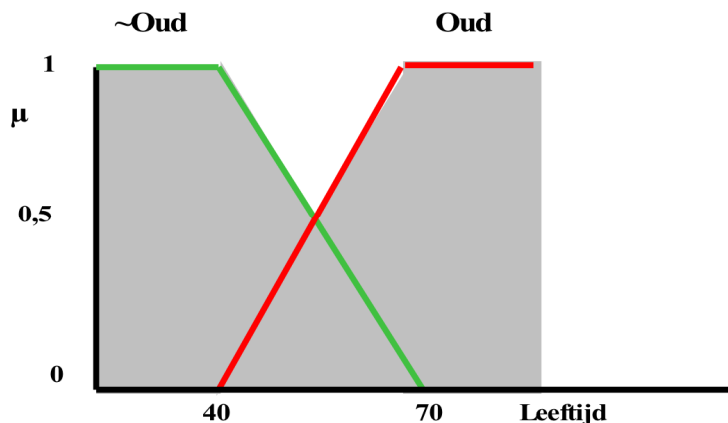
7.3. De vereniging

De doorsnede van twee klassieke verzamelingen A en B aangegeven door $A \cup B$ (= "in A **OF** in B "), bevat alle elementen die in beide afzonderlijke sets voorkomen. Dus zowel in A of in B . Het correspondeert met de Booleaanse **OR** operatie. Zo ook in de fuzzy set theorie.

De vereniging van 2 fuzzy sets A en B in X wordt gegeven door:

$$\text{OR: } \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

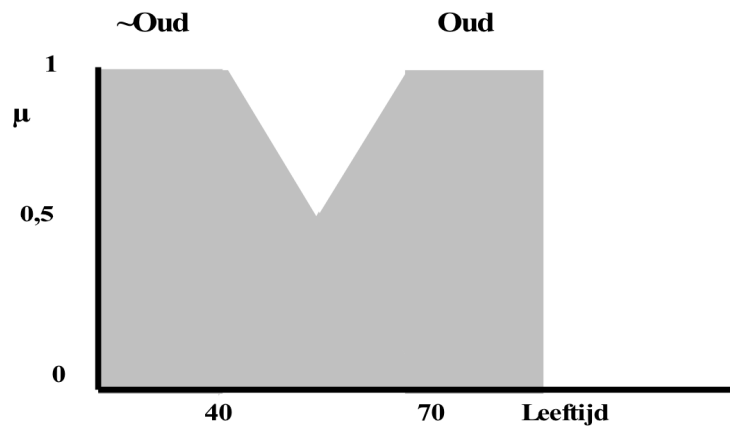
Dat wil zeggen dat voor de doorsnede van twee fuzzy sets het **maximum** van de twee argumenten genomen moet worden: het grijs gearceerde gebied in figuur 12.



Figuur 12. De vereniging van de fuzzy sets Oud en niet- Oud.

Deze drie operaties worden gebruikt in de inferentiefase van de procedure in de rule base.

Samenvattend zijn er nu dus drie fuzzy logic operatoren voor **NIET**, **EN**, en **OF** te weten **Complement**, **Minimum** en **Maximum**. Dit is belangrijk voor de "rules" ofwel regels waarmee geredeneerd wordt. Genoteerd met de klassieke symbolen staan ze in figuur 14.



Figuur 13. De resterende "fuzzy space" van de vereniging van de fuzzy sets Oud en niet- Oud.

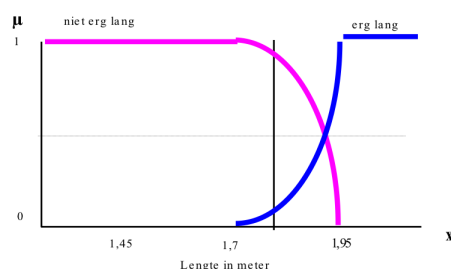
$$\text{AND: } \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\text{OR: } \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\text{NOT: } \mu_{\sim A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Figuur 14. Klassieke notatie van de drie operatoren.

Als voorbeeld van een operatie op sets staat hieronder een operatie met NOT. Met behulp van de ontkenning kan de set "erg lang" (figuur 5) veranderd worden in zijn complement de set "niet erg lang" in figuur 15.

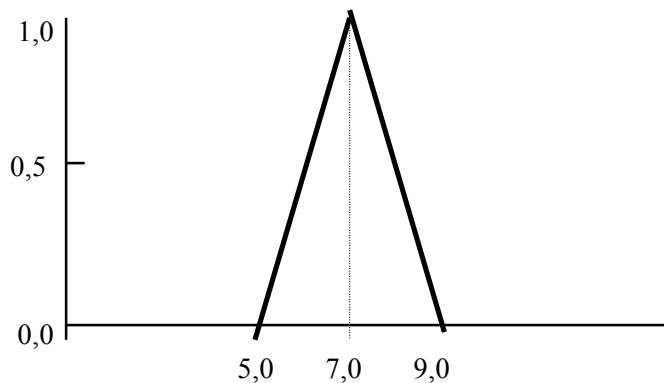


Figuur 15. De set "erg lang" is veranderd in de set "niet erg lang".

8 Fuzzy getallen en fuzzy intervallen

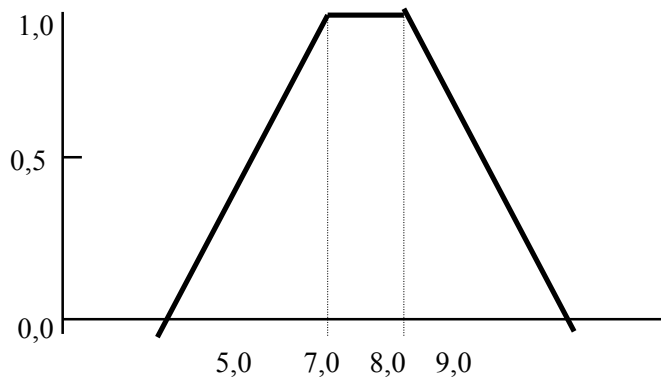
Fuzzy getallen, ofwel niet scherp begrensde getallen, zijn fuzzy sets die de benadering van een getal uit de verzameling van reële getallen weergeven. Ze hebben een piek met lidmaatschapswaarde 1. Vanaf dat punt neemt de lidmaatschapswaarde af naar 0. Ze geven de onzekerheid omtrent de exacte waarde van een variabele weer, zoals bijvoorbeeld in de uitspraken "de prijs was ongeveer 25 gulden", of "de levertijd bedraagt om en nabij de 6 weken".

Een voorbeeld van een fuzzy number 7 staat in figuur 16.



Figuur 16. Fuzzy getal "ongeveer 7"

Er bestaan ook fuzzy intervallen. In figuur 17 staat een voorbeeld.



Figuur 17. Fuzzy interval "ongeveer tussen 7 en 8"

Met fuzzy numbers kan ook gerekend worden. Dat kan door middel van het door Zadeh beschreven *Extension Principle* (uitbreidingsprincipe). Het Extension Principle is een methode met behulp waarvan rekenkundige concepten, zoals kwadrateren, optellen of vermenigvuldigen van scherpe getallen kunnen worden toegepast op fuzzy numbers. Er zal hier nu niet verder op ingegaan worden.

9 Fuzzy logic en redeneren

Allereerst weer een start met de klassieke logica.

De **propositielogica** houdt zich bezig met uitspraken die uitsluitend **waar** of **niet-waar** kunnen zijn. Deze uitspraken worden **proposities** genoemd. Propositionen kunnen worden gecombineerd met behulp van de **connectieven: negatie, conjunctie en disjunctie**.

Logische connectieven zijn vergelijkbaar met settheoretische operatoren:

De negatie met als symbool $\neg$ komt overeen met het complement ($\sim$) en met (**NOT**).

De conjunctie met als symbool $\wedge$ komt overeen met de doorsnede ($\cap$) en met (**AND**).

De disjunctie met als symbool $\vee$ komt overeen met de vereniging ($\cup$) en met (**OR**).

Nieuw is de **implicatie** met als symbool: $\longrightarrow$

Als beweringen met behulp van de woorden "**als ... dan**" worden gecombineerd spreekt men van een implicatie. Zulke beweringen worden ook wel de (produktie)regels genoemd.

Met behulp van deze connectieven kunnen er weer samengestelde proposities worden geconstrueerd, die eveneens weer uitsluitend waar of niet-waar kunnen zijn. Het waarheidsgehalte wordt bepaald door de waarheidswaarden van de afzonderlijke proposities en het effect van de connectieven. Doorgaans wordt dit weergegeven in zogenaamde waarheidstafels, die er als volgt uitzien:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

Tabel 1. Waarheidstafel voor logische connectieven. T is "True" en F is "False".

Beweringen die door middel van het woord **OF** zijn gecombineerd worden door middel van disjunctie $\vee$ weergegeven. Daarbij kan onderscheid gemaakt worden naar de inclusieve en de exclusieve disjunctie. Bij de exclusieve disjunctie gaat het om uitspraken als "het is het één of het is het ander". De beweringen sluiten elkaar uit. Bij een inclusieve disjunctie zijn beide beweringen waar. Bijvoorbeeld: "iemand is geschikt voor een bepaalde functie door opleiding of ervaring of beide". Deze inclusieve disjunctie is gebruikt in tabel 1.

De fuzzy logic brengt hier dus een uitbreiding aan. In feite kunnen de lidmaatschapswaarden beschouwd worden als de **waarheidswaarden van een propositie**. Voor elk van de gebruikte proposities wordt dus de mate van waar zijn bepaald. Fuzzy proposities zijn de basiselementen van fuzzy logic.

Naast de drie connectieven is er ook de implicatie. Door het gebruik van de implicatie worden twee of meer fuzzy proposities gecombineerd in een "**als ... dan**" relatie: **als** x is A **dan** y is B . Dit soort constructies worden de **fuzzy regels** genoemd. Met behulp van de connectieven kan het deel tussen "**als ... dan**" meerdere proposities bevatten, na **dan** komt er in principe 1 propositie.

Bijvoorbeeld: "**als** x is A en y is B **dan** z is C ". Hierop wordt teruggekomen bij fuzzy expert systemen.

Het uiteindelijke doel van fuzzy logic is het bieden van de gereedschappen voor **approximate reasoning** (aannemelijk of plausibel redeneren). Een dergelijke vorm van redeneren blijkt een belangrijke rol te spelen bij de wijze waarop mensen beslissingen nemen. Met name één van de vormen daarvan - de **qualitative reasoning** - is belangrijk. Deze is volgens de literatuur het meest ontwikkeld.

Qualitative reasoning is een wijze van redeneren waarbij gebruik gemaakt wordt van fuzzy regels, die het gedrag van een bepaald systeem in termen van invoer-uitvoer relaties beschrijven

Een **fuzzy expert systeem** is een expert systeem dat fuzzy logic gebruikt in plaats van Booleaanse. Met andere woorden een fuzzy expert systeem is een verzameling **lidmaatschapsfuncties** en **rules** (regels) die gebruikt worden om te redeneren over gegevens via approximate reasoning.

De rules in een fuzzy expert systeem hebben meestal de volgende vorm:

Als x is laag en y is hoog dan z = medium

De inputvariabelen zijn x en y , de outputvariabele is z .

Laag is een lidmaatschapsfunctie (fuzzy set !) voor x , hoog is een lidmaatschapsfunctie voor y en medium is een lidmaatschapsfunctie voor z . "En" is het connectief

Het deel van de rule tussen "als" en "dan" is de **premissie** of het **antecedent** van de rule en bestaat uit de proposities x is laag en y is hoog, verbonden door het connectief. Dit geheel wordt ook wel weer een samengestelde propositie genoemd.

Het deel na "dan" is de **conclusie** of het **consequent** van de rule.

Dit deel van de rule bepaalt een lidmaatschapsfunctie voor de output variabele.

Het antecedent en het consequent worden beide gekenmerkt door het gebruik van linguïstische variabelen met daaraan gekoppeld waarheidswaarden. Als het antecedent een beetje waar is en het consequent heel erg waar is dan is de implicatie een beetje waar. En binnen het antecedent zelf: als de propositie x is laag een beetje waar is en de propositie y is hoog heel erg waar is dan is het antecedent als geheel een beetje waar. Dat geldt voor de fuzzy sets die **linguïstische onzekerheid** representeren.

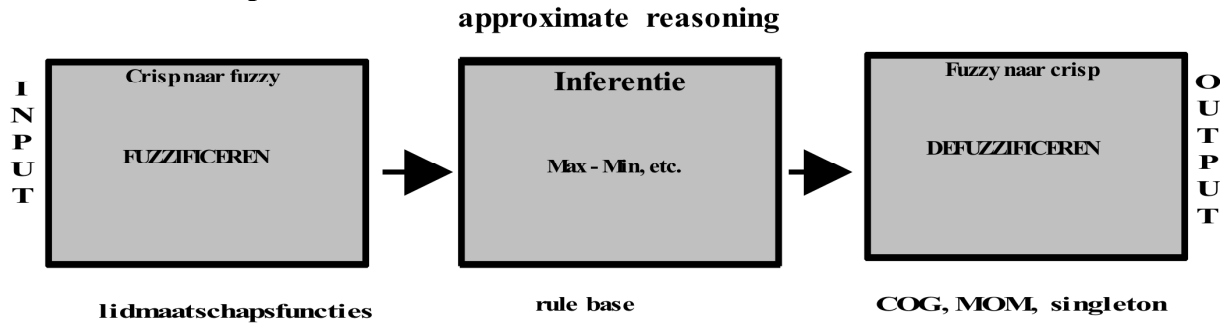
Daarnaast kan een fuzzy set ook **incompleteheid** van kennis representeren. De fuzzy set is dan een "possibility distribution". Approximate reasoning is een toepassing van fuzzy logic die gebaseerd is op de fuzzy set als possibility distribution. Qualitative reasoning dus ook. Het antecedent en het consequent worden beide dan gekenmerkt door het gebruik van linguïstische variabelen met daaraan gekoppeld possibility distributions. Hier wordt verder niet op ingegaan, omdat anders het doel van deze literatuurscriptie - namelijk deze materie in eenvoudige bewoordingen zo duidelijk mogelijk te maken - voorbijgeschoten wordt.

Een typisch fuzzy expert systeem heeft meer dan één regel. In de praktijk vaak een minimum van 9 rules. Dat komt neer op 2 input variabelen met ieder drie termen (bijvoorbeeld laag, medium, hoog) en 1 output variabele met 3 termen (bijvoorbeeld laag, medium, hoog).

De groep rules als één geheel kent een aantal - synonieme - benamingen: RULE BASE, KNOWLEDGE BASE of RULE BLOCK. De relatie tussen een variabele en de rule base wordt de **interface** genoemd.

Het fuzzy systeem vertaalt numerieke waarden in fuzzy logic waarden (fuzzificatie), berekent fuzzy logic "als" - dan " regels (inferentie), en vertaalt de resultaten weer in numerieke waarden (defuzzificatie), zie figuur 18. Soms zijn één of beide vertaalslagen niet nodig, omdat bijvoorbeeld de input en output variabelen al van zichzelf linguïstisch zijn. Er hoeft dan geen fuzzificatie of defuzzificatie plaats te vinden. Hierop is de interface met de rule base aan te passen.

10 Het inferentieproces



Figuur 18. Het hele proces globaal afgebeeld.

Dit is het proces waar het in feite om draait. In de literatuur is er geen volledige eenduidigheid in de benaming van het proces en in de te onderscheiden stappen in daarvan en in de benamingen daarvan. Getracht wordt de grote lijnen weer te geven. Het hele proces wordt wel het **inferentie proces** genoemd.

Daarin zijn te onderscheiden **de fuzzificatie, de approximate reasoning (qualitative reasoning), en de defuzzificatie** (zie figuur 18).

De approximate (qualitative) reasoning wordt onderscheiden in de **inferentie** en de **aggregatie**.

10.1 Fuzzificatie

Heel eenvoudig gesteld: hier worden de "harde cijfers" veranderd in linguïstische variabelen. Dat gebeurt door het bepalen van de lidmaatschapswaarden van de variabelen voor de verschillende linguïstische termen. Laten we uitgaan van twee input variabelen en één output variabele. Tijdens het fuzzificeren wordt er door het systeem dan gekeken wat voor crisp waarde een input variabele heeft en vervolgens worden de verschillende erbijbehorende termen bekeken. Dan wordt voor die input variabele de lidmaatschapswaarde bepaald en toegekend passend bij elk van de aanwezige termen. Dit geldt idem voor de andere input variabele en de outputvariabele. Vervolgens wordt gekeken welke regels daarbij horen. Dat gaat in de volgende fase, de **qualitative reasoning** gebeuren.

10.2 Approximate reasoning

Als alle input variabelen zijn vertaald in waarden van linguïstische variabelen kunnen de regels die op de situatie van toepassing zijn geselecteerd worden en de waarden van de erbij behorende output linguïstische variabele bepaald worden. Dat gebeurt in twee stappen; de inferentie en de aggregatie.

- **Inferentie:** berekening van de waarheidswaarde van de premisse van elke regel en de toepassing daarvan op het consequent (de implicatie). Dit resulteert in een fuzzy subset voor elke output variabele per regel.
- **Aggregatie:** alle fuzzy subsets die bepaald zijn voor de output variabele worden gecombineerd tot één fuzzy subset voor die output variabele.

10.2.1 Inferentie

Het ALS deel van de regel combineert twee situaties. Het ALS deel bepaalt of de regel waar is of niet. In de klassieke logica kan de combinatie van de twee situaties met de Booleaanse AND bepaald worden. In het geval van de fuzzy logic situatie, kan de Booleaanse AND niet gebruikt worden, omdat die niet kan omgaan met situaties die meer of minder waar zijn. In tabel 2 staan de Booleaanse AND operaties opgesteld en genoteerd met de symbolen van de propositielogica.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 2. Booleaanse AND operaties.

Er worden nu dus nieuwe operatoren gedefiniëerd voor fuzzy logic situaties: de MIN operator, de MAX operator en het complement. Zie figuur 19.

$$\begin{aligned} \text{MIN: } \mu_{A \wedge B}(x) &= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ \text{MAX: } \mu_{A \vee B}(x) &= \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ \text{COMPLEMENT: } \mu_{\neg A}(x) &= 1 - \mu_A(x) \end{aligned}$$

Figuur 19. De drie belangrijkste operatoren van fuzzy sets met de symbolen van de propositielogica.

Er zijn twee inferentie methoden of inferentie regels: 1. MIN inferentie
2. PRODUKT inferentie

MIN inferentie

Wanneer men de MIN operator gebruikt als het logische AND kan het ALS deel van de regel berekend worden. Voor crisp waarden is dat eerst het bepalen van de lidmaatschapswaarden voor de termen van de fuzzy proposities in het antecedent van de regels. Op de uitkomsten daarvan wordt de MIN operatie toegepast. Het komt erop neer dat van de waarheidswaarden behorende bij de proposities in het antecedent de laagste waarde genomen wordt (AND operator). Het resultaat is de mate van waarheid van het ALS deel van de regel. Vervolgens wordt dit resultaat toegepast voor het bepalen van de implicatie van de regel, ook een AND operatie. De lidmaatschapsfunctie van het consequent (de output variabele) wordt afgekapt op een hoogte die overeenkomt met de waarheidswaarde van de premisse.

Terzijde zij opgemerkt dat de AND operator ook zelf "fuzzy" toegepast kan worden en bij "volledige oprekking" tenslotte overgaat in de MAX operator.

PRODUKT inferentie

Bij PRODUKT inferentie wordt voor de implicatie de output lidmaatschapsfunctie vermenigvuldigd met de berekende waarheidswaarde van de premisse.

10. 2. 2 Aggregatie

In het aggregatieproces worden alle fuzzy subsets die zijn berekend zijn voor de output variabele met elkaar gecombineerd tot één enkele fuzzy subset voor die output variabele. Twee bekende aggregatieregels zijn: MAX aggregatie en SUM aggregatie.

MAX aggregatie

MAX aggregatie is te vergelijken met de OR operatie uit de Booleaanse logica.

Hierbij wordt de output fuzzy subset gemaakt door puntsgewijs het maximum te nemen over alle aan de outputvariabele toegewezen subsets.

SUM aggregatie

Bij SUM aggregatie wordt de output fuzzy subset gemaakt door puntsgewijs de som te nemen over alle aan de outputvariabele toegewezen subsets. Dit kan resulteren in getallen die groter zijn dan 1. Daarom wordt SUM aggregatie alleen gebruikt wanneer er bij het defuzzificeren een defuzzificatie methode gebruikt wordt - zoals de Center of Gravity methode (COG)- die met deze uitzonderingssituatie geen probleem mee heeft.

Vaak worden de beide fases, inferentie en aggregatie in één adem genoemd en heeft men het bijvoorbeeld over MAX-MIN inferentie. Bedoeld wordt dan MAX aggregatie en MIN inferentie. Eveneens kan men het hebben over SUM-PRODUKT inferentie, wat PRODUKT inferentie en SUM aggregatie inhoudt.

10.3 Defuzzificatie

Het kan gewenst zijn dat een fuzzy inferentieproces in plaats van een fuzzy set een crisp waarde oplevert. Er dient dan een vertaalslag plaats te vinden. Daarvoor zijn er een aantal methoden. Twee bekende methoden zijn:

1. Center Of Gravity of zwaartepuntsmethode (COG), dit is wel de meest gebruikte.
2. Mean Of Maxima(MOM).

Andere methoden zijn Centre Of Maximum (COM), en Left of Maximum (LOM) en Right of Maximum (ROM).

Vergelijking van verschillende defuzzificatie methoden

	Center-Of-Area (COA,COG)	Center-Of-Maximum (COM)	Mean-Of-Maximum (MOM)
Taalkundige karakteristiek	"Best compromise"	"Best compromise"	"Most plausibel solution"
Toepassingen	Control, decision support, data analyse	Control, decision support , data analyse	Patroonherkenning, decision support, data analyse

Tabel 3. Een aantal belangrijke defuzzificatiemethoden.

Zie voor toepassingen van de theorie en voor een beter begrip voorbeeld 2.

11 Voorbeelden

11.1 Fuzzy control

Dit is een zeer illustratief voorbeeld, wat op Internet gepubliceerd wordt. Het gaat over fuzzy control en maakt een aantal fundamentele zaken over fuzzy sets duidelijk.

Fuzzy controllers zijn de belangrijkste toepassingen van fuzzy theorie. Ze werken anders dan conventionele controllers. Expertkennis wordt gebruikt in plaats van differentiaalvergelijkingen om een systeem te beschrijven. Deze kennis kan op een heel natuurlijke manier uitgedrukt worden door linguïstische variabelen te gebruiken.

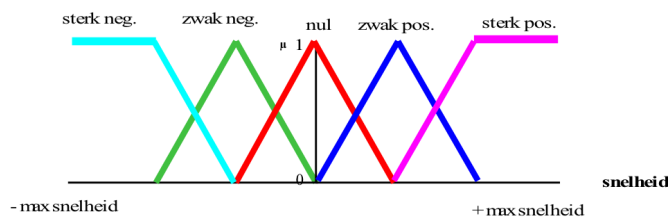
Een voorbeeld hiervan is **”de omgekeerde slinger”**.

Het probleem is om een lange paal in evenwicht te houden op een platform dat in twee richtingen kan bewegen; naar links of naar rechts.

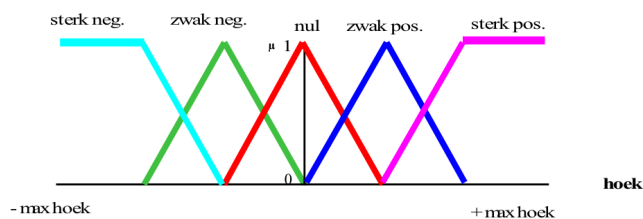
Eerst moeten (subjectief) gedefinieerd worden wat hoge snelheid, lage snelheid, etcetera van het platform is. Dit wordt gedaan door de lidmaatschapsfuncties te specificeren voor de termen (fuzzy sets) van snelheid:

- sterk negatief
- zwak negatief
- nul
- zwak positief
- sterk positief

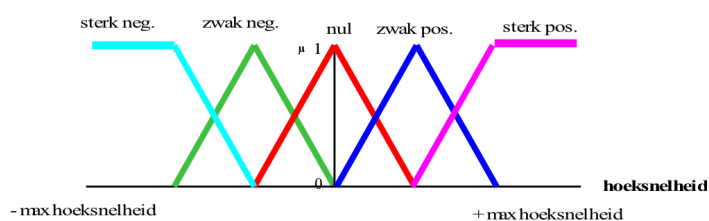
Hieronder staat in de eerste tekening de grafische weergave van de lidmaatschapsfuncties van snelheid van het platform.



Hetzelfde wordt gedaan voor de hoek tussen het platform en de ”omgekeerde slinger”.



Idem voor de hoeksnelheid van deze hoek.



Nu volgen er een aantal regels die aangeven wat er in bepaalde situaties moet gebeuren.

Laten we aannemen dat de paal rechtop staat (hoek is nul) en dat hij niet beweegt (hoeksnelheid is nul). Dit is de gewenste situatie en daarom hoeft er niets gedaan te worden (snelheid is nul).

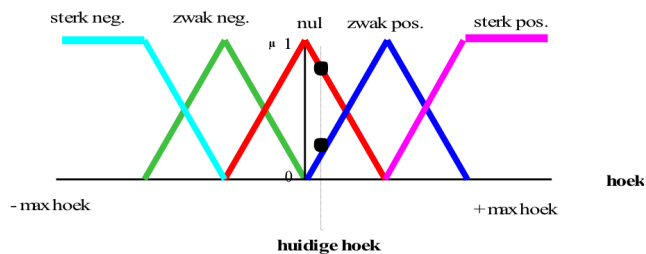
Nu een ander geval: de paal staat rechtop, maar beweegt met *lage* snelheid in *positieve* richting. De beweging van de mast moet gecompenseerd worden door het platform met *lage* snelheid in *dezelfde* richting te bewegen. Deze snelheid staat in het DAN deel van de regels.

Er zijn hiermee dus twee regels gemaakt, die in een meer geformaliseerde vorm gegoten kunnen worden.

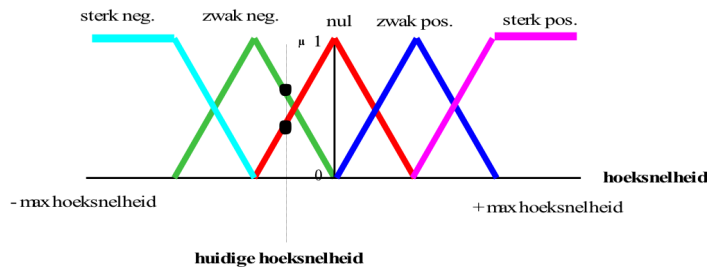
1. ALS de hoek is nul EN de hoeksnelheid is nul DAN is de snelheid nul.
2. ALS de hoek is nul EN de hoeksnelheid is zwak positief DAN is de snelheid zwak positief.

Er worden nu twee expliciete waarden voor de hoek en de hoeksnelheid gegeven om mee te rekenen:

Een waarde voor de hoek:



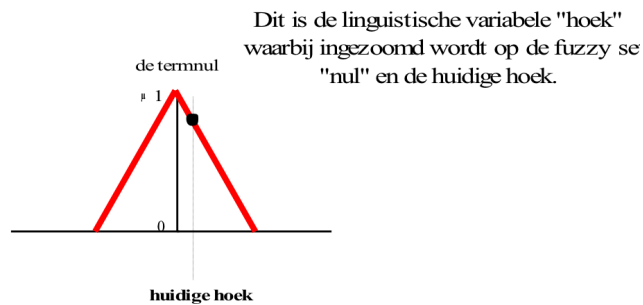
Een waarde voor de hoeksnelheid:



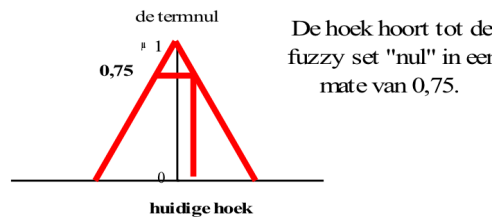
Vervolgens wordt de eerste regel toegepast op de hierboven beschreven waarden:

ALS de hoek is nul EN de hoeksnelheid is nul DAN is de snelheid nul.

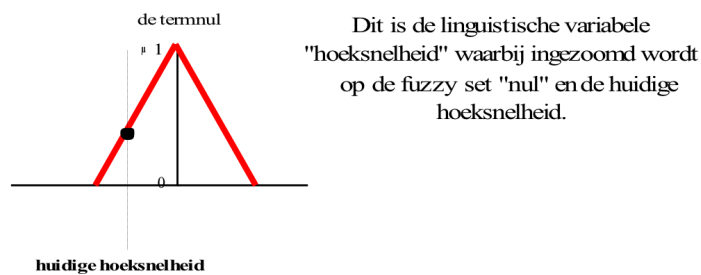
Allereerst wordt de variabele "hoek" bekeken.



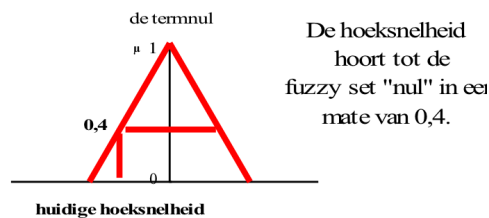
De hoek bleek niet nul te zijn; de lidmaatschapswaarde voor nul wordt bepaald: 0,75



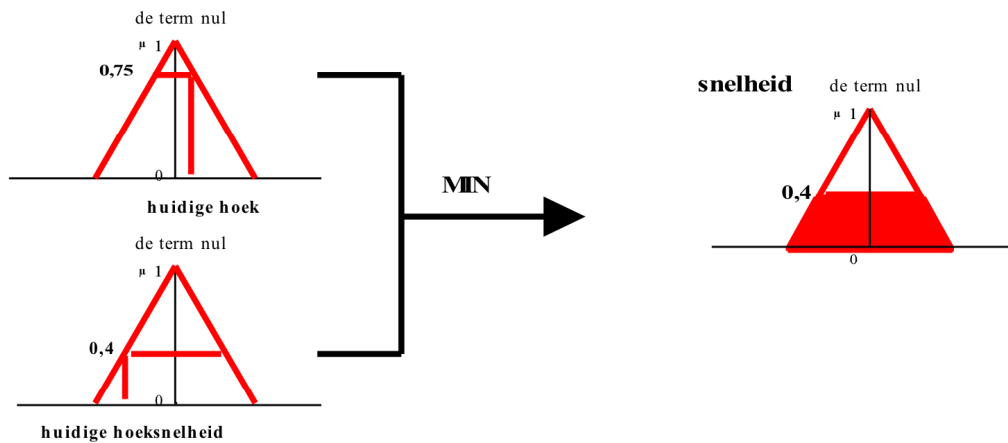
Vervolgens wordt de variabele "hoeksnelheid" bekeken.



De hoeksnelheid bleek niet nul te zijn; de lidmaatschapswaarde voor nul wordt bepaald: 0,4



Beide variabelen worden in de regel verbonden door een "EN", het DAN deel van de regel kan daarom berekend worden via een MIN operatie: $\text{MIN}(0,75; 0,4) = 0,4$.

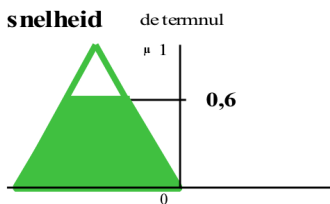


Aangezien de twee delen van de regel verbonden worden door een EN wordt de snelheid berekend via de MIN operatie $(0,75; 0,4) = 0,4$ en wordt de fuzzy set "nul" van de variabele snelheid op dit niveau afgekapt

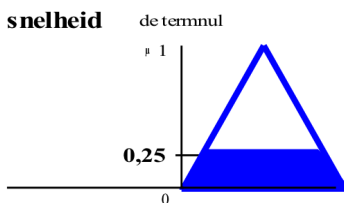
In totaal blijken 4 regels een resultaat te geven(ze *vuren*).

De andere drie zijn:

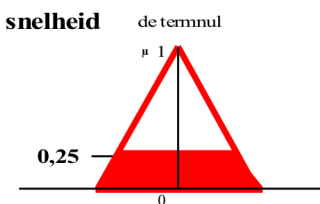
ALS de hoek is nul EN de hoeksnelheid is zwak negatief DAN is de snelheid zwak negatief. Resultaat: snelheid 0,6.



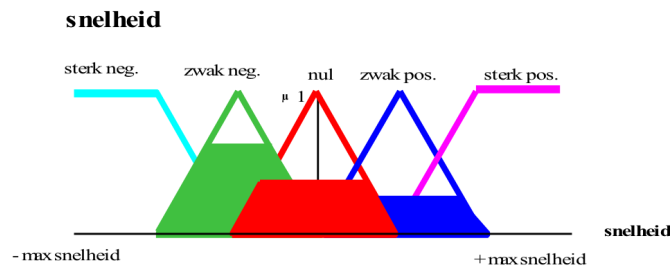
ALS de hoek is zwak positief EN de hoeksnelheid is nul DAN is de snelheid zwak positief. Resultaat: snelheid 0,25.



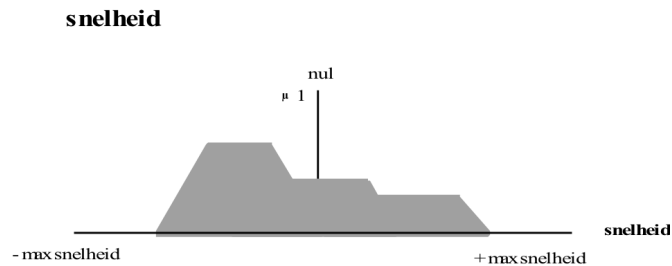
ALS de hoek is zwak positief EN de hoeksnelheid is zwak negatief DAN is de snelheid nul. Resultaat: snelheid 0,25.



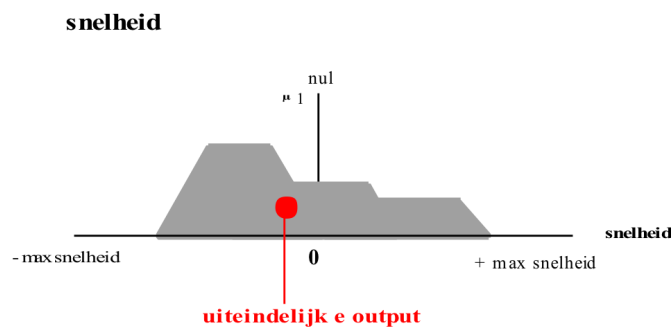
De vier uitkomsten voor snelheid overlappen elkaar en leveren het volgende resultaat op.



De figuur die ontstaat is de volgende:



Het resultaat van de fuzzy controller is een fuzzy set (van snellheid). Er moet nu één representatieve waarde als de uiteindelijke output gekozen worden. Er zijn verscheidene heuristische methoden (defuzzificatie methoden). Eén daarvan is de Center Of Gravity.



De hele procedure die gevolgd is wordt gebruikt in een *Mamdani controller*. Mamdani wordt ook wel de "vader van de fuzzy control" genoemd.

11.2 De Liquiditeitsschatting

Dit is een voorbeeld uit Fuzzy logic & neurofuzzy applications in business & finance, van C. von Altrock

Het voorbeeld is enigszins gewijzigd en aangepast aan de Nederlandse situatie, het gaat erom de fuzzy logic uit te leggen. Het gaat over een bank die de liquiditeit van klanten wil schatten. Als voorbeeld worden er vier klanten genomen. Deze staan in tabel 4.

Klant	Inkomen in guldens.	Continuïteit van het inkomen
DeMarco	118.000	0,12
Pommerland	45.700	0,71
Wang	94.250	0,89
Beauchamps	337.400	0,22

Tabel 4.

Fuzzificatie

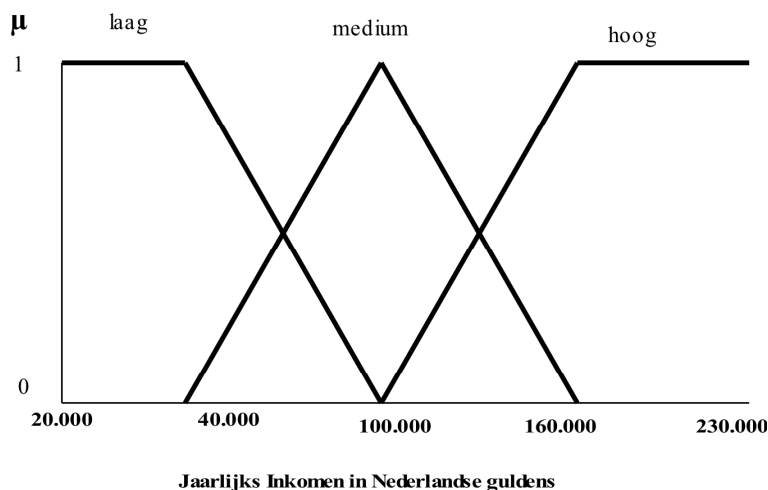
Om te beginnen zullen de gegevens gefuzzificeerd moeten worden. Om dat te kunnen doen moeten Inkomen, Continuïteit en Liquiditeit vertaald worden in termen van linguïstische variabelen. Voor Inkomen en Continuïteit - de inputvariabelen - is gekozen voor drie termen. Voor de Liquiditeit - de outputvariabele - is gekozen voor vijf termen. Een overzicht staat in tabel 5.

De linguïstische variabelen en de erbijbehorende termen zijn:

1. Inkomen: laag, medium, hoog
2. Continuïteit: laag, medium, hoog
3. Liquiditeit: erg laag, laag, medium, hoog, zeer hoog

Tabel 5.

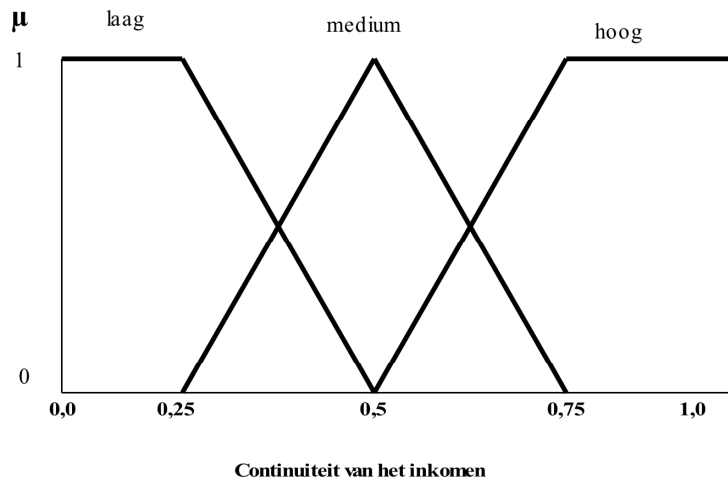
Voor elke linguïstische variabele worden de termen uitgedrukt in hun lidmaatschapsfuncties. Deze staan voor Inkomen en Continuïteit in de figuren 20 en 21



Figuur 20. De linguïstische variabele "Inkomen".

De continuïteit van het inkomen is een cijfer wat uit statistische gegevens berekend wordt.

Een continuïteit in de buurt van 1 betekent een zeer stabiel inkomen en een continuïteit in de buurt van 0 betekent een zeer wisselend inkomen.



Figuur 21. De linguïstische variabele "Continuïteit van het Inkomen".

In tabel 6 staan de lidmaatschapswaarden per klant voor de termen van inkomen en continuïteit.

Let wel: een continuïteit in de buurt van 0 betekent een lidmaatschapswaarde μ voor de term "lage continuïteit" in de buurt van 1. Het betekent namelijk dat men heel hoog scoort voor de term lage continuïteit.

Klant	Lidmaatschapswaarden voor de termen van het Inkomen		Lidmaatschapswaarden voor de termen van Continuïteit van het inkomen	
	Term	μ	Term	μ
DeMarco	laag	0	laag	1
	medium	0,85	medium	0
	hoog	0,15	hoog	0
Pommerland	laag	0,8	laag	0
	medium	0,2	medium	0,1
	hoog	0	hoog	0,9
Wang	laag	0,1	laag	0
	medium	0,9	medium	0
	hoog	0	hoog	1
Beauchamps	laag	1,0	laag	1
	medium	0	medium	0
	hoog	0	hoog	0

Tabel 6. Linguïstische vertaling van de numerieke klantgegevens in lidmaatschapswaarden.

Vervolgens kunnen we nog in gewone spreektaal uitdrukken wat in tabel 6 in lidmaatschapswaarden is uitgedrukt. Zie tabel 7.

Klant	Inkomen	Continuïteit van het inkomen
DeMarco	tamelijk medium, een beetje hoog	laag
Pommerland	tamelijk laag, een beetje medium	heel erg hoog, een tikje medium
Wang	heel erg medium, een tikje laag	hoog
Beauchamps	laag	laag

Tabel 7. Linguïstische interpretatie van de waarden van tabel 6.

Nu er gefuzzificeerd is kan de volgende fase beginnen.

Inferentie

In tabel 8 staan de 4 regels vermeld die het fuzzy expert systeem hanteert. Deze regels vormen de Rule Base.

Regel 1	ALS	Inkomen is laag			DAN	Liquiditeit is erg laag
Regel 2	ALS	Continuïteit is laag	EN	Inkomen is medium	DAN	Liquiditeit is laag
Regel 3	ALS	Continuïteit is hoog	EN	Inkomen is medium	DAN	Liquiditeit is hoog
Regel 4	ALS	Continuïteit is medium	EN	Inkomen is hoog	DAN	Liquiditeit is medium

Tabel 8. De regels die van toepassing zijn, deze staan in de rule base.

MIN operatie.

Gebruik makend van de MIN operator toont voorbeeld 1 in tabel 9 hoe de ALS-delen van de regels voor klant Pommerland uitvallen. Puntsgewijs wordt eerst van elke propositie in het antecedent de lidmaatschapswaarde bepaald. en vervolgens wordt de MIN operatie toegepast.

De regels toegepast op de ALS delen voor Pommerland

			μC		μI	$\text{MIN}(\mu C; \mu I)$
Regel 1	ALS			Inkomen is laag	0,8	0,8
Regel 2	ALS	Continuïteit is laag	0,0	Inkomen is medium	0,2	0,0
Regel 3	ALS	Continuïteit is hoog	0,9	Inkomen is medium	0,2	0,2
Regel 4	ALS	Continuïteit is medium	0,1	Inkomen is hoog	0,0	0,0

Tabel 9. De lidmaatschapswaarde per propositie en het resultaat van de MIN operatie in de laatste kolom

Deze resultaten zijn de **mate van waarheid** van de ALS delen en geven dus aan hoe adequaat elke regel voor de onderhavige casus is.

Met andere woorden het ALS deel is voor:

Regel 1: 0,8 WAAR

Regel 2: 0,0 WAAR

Regel 3: 0,2 WAAR

Regel 4: 0,0 WAAR

Implicatie

Gezien het resultaat van de evaluatie is de implicatie (het DAN deel) voor:

Regel 1: 0,8 WAAR

Regel 2: 0,0 WAAR

Regel 3: 0,2 WAAR

Regel 4: 0,0 WAAR

Aggregatie

MAX operatie.

De evaluatie volgens de MIN operatie leverde op dat regel 1 voor 0,8 waar is en dat regel 3 voor 0,2 waar is.

De waarde van de linguïstische variabele "Liquiditeit" voor klant Pommerland zou zijn:

Liquiditeit = { erg laag = 0,8/ laag = 0,0/ medium = 0,0/ hoog = 0,2/ zeer hoog = 0,0.}

Een linguïstische interpretatie van dit resultaat zou kunnen zijn: "behoorlijk lage, amper hoge liquiditeit".

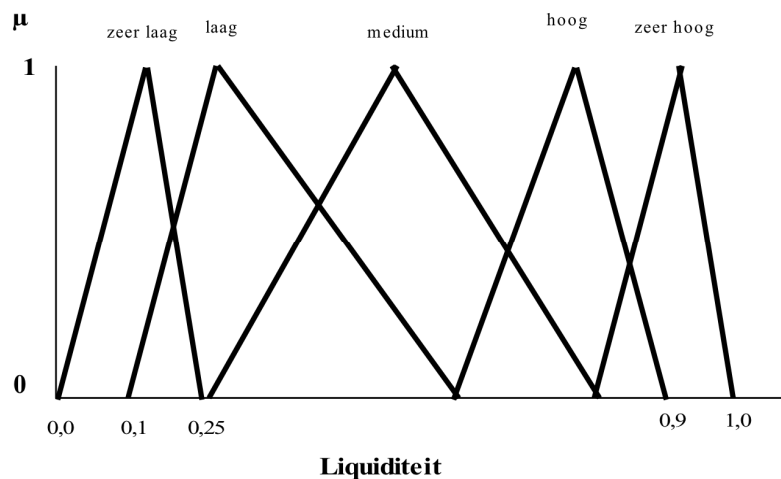
In tabel 10 staan de lidmaatschapswaarden nog eens overzichtelijk weergegeven.

Klant	Lidmaatschapswaarden voor de termen van Liquiditeit	
	Term	μ
Pommerland	zeer laag	0,8
	laag	0,0
	medium	0,0
	hoog	0,2
	zeer hoog	0,0

Tabel 10. De lidmaatschapswaarden van Pommerland voor liquiditeit.

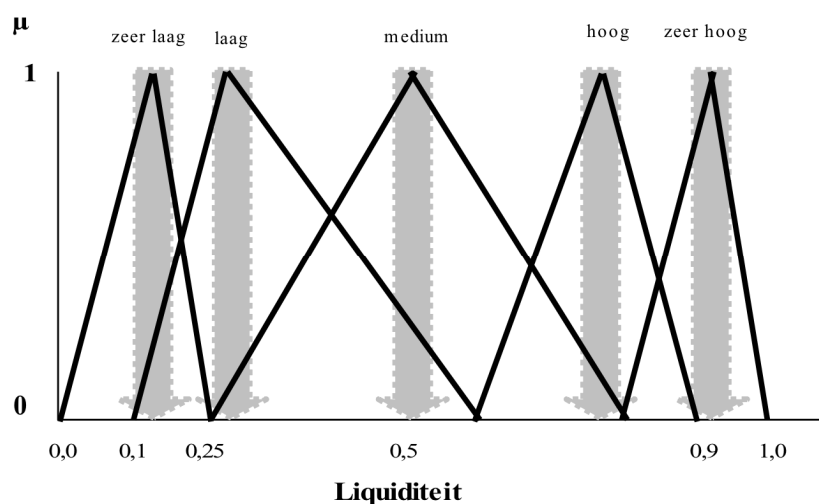
Defuzzificatie

Aan het eind van de inferentie was het resultaat voor liquiditeit een waarde van een linguïstische variabele. Om deze waarde te kunnen gebruiken om er mee te vergelijken of in een rangorde te zetten moet dat vertaald worden in een getal. Dat is het defuzzificeren. In figuur 22 staan de lidmaatschapsfuncties van Liquiditeit.



Figuur 22. De linguïstische variabele Liquiditeit.

Een methode is dat in de eerste stap de typische waarde voor iedere term wordt berekend als het maximum van de respectievelijke lidmaatschapsfuncties. Dat zijn de grijze pijlen in figuur 23



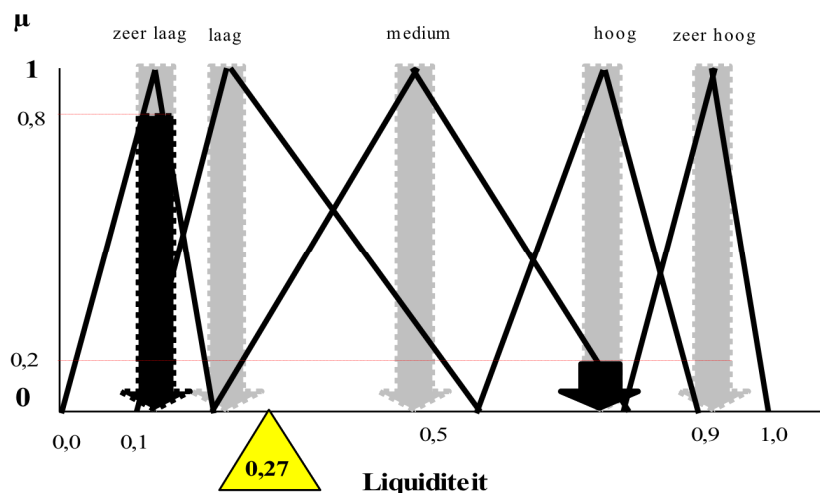
Figuur 23. In de eerste stap van defuzzificatie wordt van iedere term de typische waarde bepaald als het maximum van de respectievelijke lidmaatschapsfuncties.

In de tweede stap wordt het beste compromis bepaald. Aan de horizontale positie wordt een gewicht² geplaatst dat een grootte heeft in verhouding met de mate van waarheid van de actie. De gewichten zijn de zwarte pijlen die de grijze pijlen deels bedekken in figuur 24. De exacte compromiswaarde wordt dan bepaald door de gewichten op een punt te laten balanceren. In het voorbeeld is dat bij de waarde 0,27.

Deze waarde is het beste compromis voor het schatten van de liquiditeit.

De liquiditeit van Pommerland is dus erg laag.

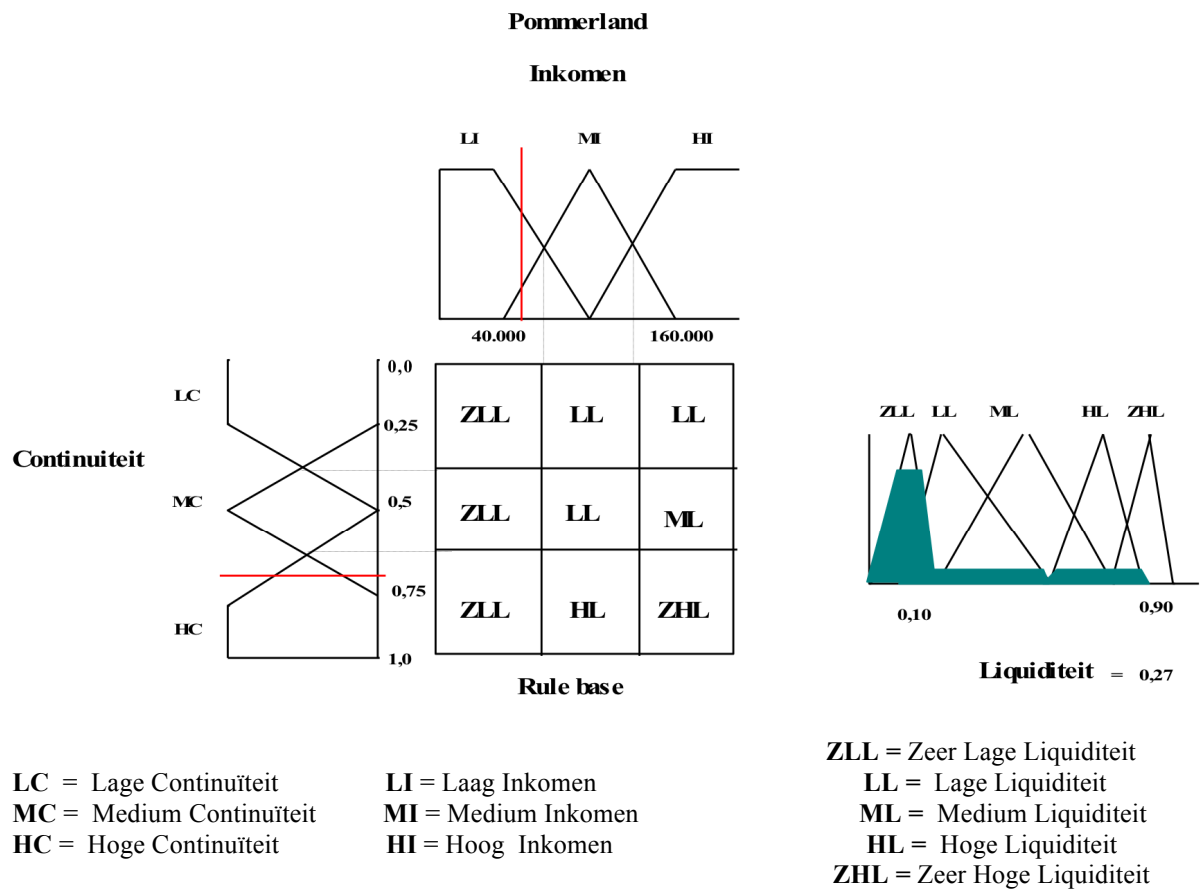
Deze methode heet Center Of Maximum (COM) en is identiek aan de Center Of Gravity methode. Ze maken beide gebruik van singletons. Dat zijn de hierboven besproken "ontaarde" lidmaatschapswaarden.



Figuur 24. Door de conflicterende resultaten uit te balanceren wordt een crisp cijfer gevonden.

Met behulp van de fuzzy logic software die op CD-ROM bij het boek van Eyzenga & Westerhof werd geleverd werd de schatting van de liquiditeit in een simulatie fuzzy controlmodel uitgevoerd. Ook daar kwam de liquiditeit van klant Pommerland uit op 0,27. Hieronder staat het geheel in een overzicht.

De twee input variabelen Inkomen en Continuïteit zijn weergegeven als hun lidmaatschapsfuncties (=fuzzificatie). In de rule base staan de regels weergegeven. De output variabele Liquiditeit staat rechts, met de fuzzy oplossingsruimte blauwgroen gekleurd weergegeven. De rode streep in Inkomen en in Continuïteit geeft de positie van Pommerland weer. In dit geval laat de output zich in globale termen ook al lezen. Door de beide rode lijnen door te trekken tot waar zij elkaar kruisen krijgt men een indicatie voor de liquiditeit. Dit laatste moet men zien als een didactisch bedoelde weergave van een fuzzy expert systeem.



Figuur 25. Het hele proces van klant Pommerland in één schema.

12 Toepassingen van fuzzy logic

Om te beginnen zijn hier de 5 meest gestelde vragen over fuzzy logic, met de antwoorden, overgenomen uit Fuzzy Logic & Neurofuzzy applications explained, van C. von Altrock.

Wat is fuzzy logic?

Fuzzy logic is een innovatieve technologie die conventionele systeemontwerpmethoden verrijkt met specialistische expertise. Door het gebruik van fuzzy logic is de noodzaak van grote mathematische modellen te omzeilen. Vervuulende factoren in een controlesysteem worden aldus vervangen door een zichzelf verklarende linguïstische beschrijving van de controlestrategie.

Wat is fuzzy logic NIET?

Fuzzy logic is geen ruimtevaartwetenschap. Hoewel het is gebaseerd op een complexe wiskundige basis is het gebruik ervan in de praktijk makkelijk te leren.

Kan fuzzy logic alles doen wat niet met andere systemen gedaan kan worden?

Theoretisch zou ieder fuzzy logic-achtig systeem ook met andere ontwerp-technieken gemaakt kunnen worden. Echter, de inspanning om dat met andere ontwerp-methoden te doen zou in veel gevallen buitengewoon complex zijn.

Is er iets wat niet kan met fuzzy logic ?

Theoretisch niet. Fuzzy logic is een ware uitbreiding van de klassieke logica, en fuzzy logic controllers zijn een ware uitbreiding van lineaire controle modellen. Dus alles wat gemaakt werd met conventionele ontwerp-technieken kan ook gemaakt worden met fuzzy logic. Echter in een aantal gevallen kunnen conventionele oplossingen eenvoudiger, sneller en efficiënter zijn. De sleutel naar het succesvol gebruik van fuzzy logic is een slimme combinatie met conventionele technieken.

Kan een fuzzy logic systeem geverifieerd worden en kan de stabiliteit ervan bewezen worden?

Ja. Een fuzzy logic systeem is een in de tijd onveranderlijk en deterministisch systeem. Dus iedere verificatie en stabiliteitsanalyse methode kan ook met fuzzy logic gebruikt worden.

Hieronder volgt een bloemlezing van gebieden waarop fuzzy logic gebruikt wordt, deze is indicatief en uiteraard niet volledig.

Op het gebied van de financiële wereld:

- Evaluatie van kredietwaardigheid
- Cash control
- Risico beoordelingen/schattingen
- Voorspellingen op het gebied van beurs en geldhandel
- Detectie van fraude en vervalsingen

Op het gebied van de zakenwereld:

- Voorspelling verkoopresultaten
- Evaluatie van marketing modellen
- Claimbeoordelingen voor verzekeringen
- Kosten/baten analyses
- Kwaliteitscontrole

Op het gebied van de technologie

- Automatische controle van stuwdamdeuren voor waterkrachtcentrales (*Tokio Electric Pow.*)
- Het instellen van camera's voor o.a. opname's van sportevenementen (*Omron*)
- Cruise control van auto's (*Nissan, Subaru*).
- Optimale planning van schema's van busritten (*Toshiba, Nippon-System, Keihan-Express*)
- Archiveringsystemen voor documenten (*Mitsubishi Elec.*)
- Herkenning van handgeschreven symbolen met zakcomputers (*Sony*)
- Herkenning van handschrift, objecten, stem (*CSK, Hitachi, Hosai Univ., Ricoh*)

Op medisch gebied

- In de anaesthesiologie

Op juridisch gebied

- * Simulatie van juridische procedures (*Meihi Gakin Univ., Nagoy Univ.*)

Samenvatting

Doel. Het doel van deze literatuurscriptie is tweeledig. In de eerste plaats bleek de fuzzy logic een belangrijke rol te gaan spelen bij de conclusies in de onderzoeksscriptie waar dit literatuuronderzoek bij hoort. Door de onbekendheid met dit gebied van de wetenschap was het nodig dat er kennis op dat gebied werd opgedaan. De beste manier om dat te doen is er zich in te verdiepen en dan te trachten het aan anderen duidelijk te maken. Het schrijven van deze literatuurscriptie is dus een leerinstrument geweest voor de schrijver dezes.

Het tweede doel is om het belang en de mogelijke impact van de resultaten van de onderzoeksscriptie duidelijker te maken. Dat kan alleen als de lezer van die scriptie iets van de fuzzy logic begrijpt. Deze literatuurscriptie is dus een ondersteuning voor de onderzoeksscriptie van de schrijver dezes.

Opzet. Relevante gegevens over fuzzy logic werden bestudeerd met behulp van gedrukte tekst, door oefeningen met de meegeleverde software en lezing van Internet publicaties. Met deze gegevens werd een op artsen gerichte verhandeling over de basisprincipes van de fuzzy logic geschreven met daarnaast aandacht voor de toepassingen van fuzzy logic. Tevens wordt een lans gebroken voor een "literatuuronderzoek nieuwe stijl". Wie vasthoudt aan alleen maar afgaan op gedrukte tekst in boeken en tijdschriften is in de volgende eeuw - die over 3 jaar begint met het jaar 2001 - een uitgestorven dinosaurus.

Plaats. Achter de PC.

Methode. Het herindelen van stukken tekst van anderen, aanééngeplakt met eigen tekst en illustraties tot een nieuw logisch geheel.

Resultaten. Fuzzy logic is een uitbreiding van de klassieke Booleaanse logica. De "vage logica" is niet vaag en heeft als voordeel dat hij vaak sneller, efficiënter en zelfs milieuvriendelijker werkt.

Hij werkt met lidmaatschapsfuncties in plaats van met de karakteristieke functies 0 en 1 uit de klassieke logica. De lidmaatschapswaarde geeft aan in welke mate een gemeten waarde van een linguïstische variabele tot een bepaalde term van die variabele behoort. Een voorbeeld van zulke termen zijn klein, medium en lang voor de linguïstische variabele lengte. Elke term heeft een lidmaatschapsfunctie met een interval van 0 tot 1. Iemand met een bepaalde lengte kan dan bijvoorbeeld een lidmaatschapswaarde van 0,4 voor lang hebben, één van 0,6 voor medium en 0 voor klein.

Dezelfde operatoren - ontkenning, doorsnijding en vereniging - die werkzaam zijn op klassieke verzamelingen (crisp sets) zijn ook van toepassing op fuzzy sets (vage verzamelingen) en heten daar complement, doorsnijding (MIN operatie) en vereniging (MAX operatie). Deze zijn onder meer belangrijk bij de approximate reasoning - het redeneersysteem van de fuzzy logic - waarbij de regels opgeslagen in de "rule base" een essentiële rol spelen. Deze regels hebben meestal de vorm van implicaties. Door deze regels kan het systeem werken met menselijke kennis.

De processen van een fuzzy expert systeem zijn fuzzificatie, approximate reasoning (inferentie en compositie) en defuzzificatie. Voor de defuzzificatie bestaat er een aantal verschillende methodes waarvan de Center Of Gravity één van de belangrijkste is.

Fuzzy logic applicaties worden onder andere al toegepast in de technische industrie (camera-instelling, handschriftherkenning, cruise control), de financiële wereld (beoordeling kredietwaardigheid, risico beoordeling, claimbeoordelingen) en heel sporadisch in de curatieve geneeskunde (anaesthesiologie).

Conclusie. Fuzzy logic is een nieuwe technologie op het gebied van de automatisering die een serieuze studie naar de mogelijkheden van applicaties daarvan in de arbeids- en bedrijfsgeneeskunde vereist. Een eerste aanzet daartoe wordt gegeven in de onderzoeksscriptie waar deze literatuurstudie bij hoort.

Literatuur

Jaar	Auteur	Titel en vermelding van meegeleverde software	Tijdschrift/Uitgeverij
1995	Altrock, C. von	Fuzzy logic & neurofuzzy applications explained. Bevat meegeleverde software.	Prentice Hall PTR
1997	Altrock, C. von	Fuzzy logic & neurofuzzy applications in business & finance. Bevat meegeleverde software.	Prentice Hall PTR
1996	Altrock, C. von	Fuzzy Logic design: Methodology, Standards and Tools	Internetpublicatie. URL: http://www.fuzzytech.com/e_a_eet.h
1996	Bauer, P., Nouak S., Winkler R.	A brief course in Fuzzy Logic and Fuzzy Control	Internetpublicatie. URL: http://www.tlll.uni.linz.ac.at/fuzzy
1985	Brule, J.F.	Fuzzy systems - a tutorial	Internetpublicatie. URL: http://www.austinlinks.com/Fuzzy/tutorial.html
1980	Dubois, D. and Prade, H.	Fuzzy sets and systems: Theory and Applications	Academic Press, New York
1988	Dubois, D. and Prade, H.	Possibility Theory	Plenum Press, New York
1997	Eyzenga, G. & Westerhof, E.	Fuzzy Logic in de Bedrijfswetenschappen. Theorie & Toepassingen. Bevat meegeleverde software.	Van Gorcum & Comp. BV
1993	FAQ: Fuzzy Logic and Fuzzy Expert Systems...ing]	What is a fuzzy expert system?	Internetpublicatie. URL: http://www.cs.cmu.edu/Groups/AI/htm/faqs/ai/fuzzy/part1-doc-4.html
1995	FAQ: Fuzzy Logic and Fuzzy Expert Systems...ing]	What is fuzzy control?	Internetpublicatie. URL: http://www.cs.cmu.edu/Groups/AI/htm/faqs/ai/fuzzy/part1-doc-6.html
1993	FAQ: Fuzzy Logic and Fuzzy Expert Systems...ing]	What are fuzzy numbers and fuzzy arithmetic?	Internetpublicatie. URL: http://www.cs.cmu.edu/Groups/AI/htm/faqs/ai/fuzzy/part1-doc-7.html
1993	FAQ: Fuzzy Logic and Fuzzy Expert Systems...ing]	How are membership values determined?	Internetpublicatie. URL: http://www.cs.cmu.edu/Groups/AI/htm/faqs/ai/fuzzy/part1-doc-9.html
1994	FAQ: Fuzzy Logic and Fuzzy Expert Systems...ing]	What is the relationship between fuzzy truth values and probabilities?	Internetpublicatie. URL: http://www.cs.cmu.edu/Groups/AI/htm/faqs/ai/fuzzy/part1-doc-10.html
1994	Horstkotte, E.	Fuzzy Logic Overview.	Internetpublicatie. URL: http://www.austinlinks.com/Fuzzy/overview.html . Copyright © 1994-1996 Quadralay Corporation.
1994	Horstkotte, E.	Fuzzy Expert Systems.	Internetpublicatie. URL: http://www.austinlinks.com/Fuzzy/expert-systems.html . Togai Infralogic, Inc.
1992	Huntington Group	Fuzzy Environmental Control	Internetpublicatie. URL: http://www.austinlinks.com/Fuzzy/control.html
1995	Korn, G.A.	Neural Networks and Fuzzy Logic Control on Personal Computers and Workstations. Bevat meegeleverde software.	A Bradford Book The MIT Press Cambridge, Massachusetts, London, England